

# NOUVELLE DEMONSTRATION D'UN THEOREME DE J. L. KRIVINE SUR LA FINIE REPRESENTATION DE $l_p$ DANS UN ESPACE DE BANACH

PAR  
H. LEMBERG

## ABSTRACT

We prove that if  $(x_n)$  is a sequence in a Banach space with infinite dimensional span, then  $c_0$  or  $l_p$  for a  $1 \leq p < \infty$  is block finitely represented in  $(x_n)$ .

Soit  $1 \leq p < \infty$  et soit  $(x_j)$  une suite infinie dans un espace de Banach. On dit que  $l_p$  (respectivement  $c_0$ ) est finiment représenté en blocs dans  $(x_j)$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $n$  entier naturel, il existe  $n$  sous-ensembles finis  $(F_1, F_2, \dots, F_n)$  de  $\mathbb{N}$  vérifiant  $\max F_i < \min F_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) et des éléments avec  $b_i$  appartenant au sous espace engendré par  $\{x_j / j \in F_i\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tels que pour tous scalaires  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ :

$$(1 - \varepsilon) \left( \sum_{i=1}^n |c_i|^p \right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i b_i \right\| \leq (1 + \varepsilon) \left( \sum_{i=1}^n |c_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\left( \text{respectivement : } (1 - \varepsilon) \sup_{i=1-n} |c_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i b_i \right\| \leq (1 + \varepsilon) \sup_{i=1-n} |c_i| \right).$$

L'objet de cet article est de donner une démonstration simplifiée, ainsi qu'une légère amélioration, du théorème de J.L. Krivine ([2]).

**THÉORÈME.** *Si  $(x_j)$  est une suite dans un espace de Banach, engendrant un sous espace de dimension infinie, alors l'un des  $l_p$  pour un  $1 \leq p < \infty$  est finiment représenté en blocs dans  $(x_j)$  ou  $c_0$  est finiment représenté en blocs dans une permutation de  $(x_j)$ .*

Nous démontrerons le résultat suivant:

Reçu le 11 février 1981

**THÉORÈME.** *Si  $(x_j)$  est une suite dans un espace de Banach, engendrant un sous espace de dimension infinie, alors l'un des  $l_p$  pour un  $1 \leq p < \infty$  ou  $c_0$  est finiment représenté en blocs dans  $(x_j)$ .*

Dans une première partie nous rappelons quelques définitions ainsi que le résultat de J.L. Krivine concernant l'existence d'une suite 1-inconditionnelle, 1-sous symétrique finiment représentée en blocs dans toute suite infinie. Nous rappelons ensuite une proposition relative aux points frontières du spectre d'un opérateur qui nous permet de construire des blocs équivalents à la base canonique de  $l_p^k$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ).

Dans une seconde partie, nous démontrons le résultat annoncé en construisant explicitement les blocs  $(1 + \varepsilon)$  équivalents à la base canonique de  $l_p^k$ .

### **I. Définitions, rappels et théorèmes sur les points frontières du spectre d'un opérateur**

Soient  $(x_j)$  et  $(y_j)$  deux suites (finies ou infinies) dans des espaces de Banach  $X$  et  $Y$ . Nous notons  $[x_j]$  le sous espace vectoriel fermé engendré par  $\{x_j \mid j = 1, 2, \dots\}$ . Nous dirons que  $(x_j)$  est une suite infinie si  $\dim[x_j] = \infty$ .

Les suites  $(x_j)$  et  $(y_j)$  sont  $(1 + \varepsilon)$  équivalentes s'il existe un isomorphisme  $T: [x_j] \rightarrow [y_j]$  vérifiant  $Tx_j = y_j$  pour tout  $j$  et  $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$ .

$(y_j)$  est une suite de blocs disjoints de  $(x_j)$  s'il existe des sous-ensembles  $F_1, F_2, \dots$  de  $\mathbb{N}$  tels que pour tout  $j: \max F_j < \min F_{j+1}$  et  $y_j \in [x_i]_{i \in F_j}$ .

Pour deux suites  $(x_j)$  et  $(y_j)$  infinies,  $(y_j)$  sera finiment représentée en blocs dans  $(x_j)$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $n$  entier naturel, il existe des blocs disjoints  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  de  $(x_j)$  tels que  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  soit  $(1 + \varepsilon)$  équivalent à  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Si  $(y_j)$  est la base canonique de  $l_p$  ou de  $c_0$ , nous dirons que  $l_p$  ou  $c_0$  est finiment représenté en blocs dans  $(x_j)$  (si  $(y_j)$  l'est).

La suite  $(x_j)$  est 1-inconditionnelle si elle est 1-équivalente à la suite  $(\varepsilon_j x_j)$  pour tout choix de signes  $\varepsilon_j$ , pour tout  $j$ . Soit  $D$  un ensemble totalement ordonné. Une suite  $(x_j)$  est 1 sous symétrique si  $(x_1, \dots, x_n)$  est 1-équivalente à  $(x_{m_1}, \dots, x_{m_n})$  pour tout  $n$  et tout  $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ .

Nous utiliserons les deux propositions suivantes dont la démonstration est laissée au lecteur.

**PROPOSITION I.1.** *La finie représentation en blocs est une relation transitive. C'est-à-dire, si  $(x_j)$ ,  $(y_j)$  et  $(z_j)$  sont trois suites dans des espaces de Banach  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  et si  $(x_j)$  est finiment représentée en blocs dans  $(y_j)$  et  $(y_j)$  finiment représentée en blocs dans  $(z_j)$  alors  $(x_j)$  est finiment représentée en blocs dans  $(z_j)$ .*

PROPOSITION I.2. Soit  $(e_j)$  une suite de vecteurs indépendants dans un espace vectoriel  $E$ , soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre non trivial sur  $\mathbb{N}$ ,  $(x_j)$  une suite dans un espace de Banach  $X$ ,  $(k_j)$  une suite croissante d'entiers naturels et pour tout  $n$ ,  $b_1^n, \dots, b_{k_n}^n$  des blocs disjoints de  $(x_j)$ .

Supposons qu'il existe  $\delta > 0$  et  $K < \infty$  tels que

(a)  $\|b_i^n\| \leq K$  pour tout  $i$  et  $n$ .

(b)  $\|\sum_{i=1}^{k_n} c_i b_i^n\| \geq \delta \sup_{1 \leq i \leq k_n} |c_i|$  pour tout  $n$  et tous  $(c_1, \dots, c_{k_n})$  scalaires.

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  définissons

$$\left\| \sum_{i=1}^m c_i e_i \right\| = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \left\| \sum_{i=1}^m c_i b_i^n \right\|.$$

Alors  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$  telle que  $(e_j)$  est une suite basique dans  $E$ , finiment représentée en blocs dans  $(x_j)$ . Si, de plus,  $(x_j)$  est 1-inconditionnelle,  $(e_j)$  l'est également.

Rappelons enfin les résultats suivants:

THÉORÈME I.1. Soit  $(x_j)$  une suite infinie dans un espace de Banach  $X$ . Soit  $D$  un ensemble totalement ordonné. Il existe une suite  $(y_d)_{d \in D}$  1-inconditionnelle, 1 sous-symétrique finiment représentée en blocs dans  $(x_j)$  (cf. [2]: théorème I.3).

THÉORÈME I.2. Soit  $X$  un espace de Banach,  $T$  un endomorphisme de  $X$  et  $\lambda$  un point de la frontière du spectre de  $T$ . Il existe alors une suite normalisée  $(v_n)$  de  $X$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|TV_n - \lambda V_n\| = 0$  (cf. [1] p. 9).

THÉORÈME I.3. Soient  $T$  et  $U$  deux endomorphismes de  $X$  qui commutent. Soit  $\lambda$  un point de la frontière du spectre de  $T$ . Il existe une suite normalisée  $(\omega_n)$  de  $X$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T\omega_n - \lambda\omega_n\| = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U\omega_n - \mu\omega_n\| = 0$  pour un  $\mu$  élément du spectre de  $U$ .

DÉMONSTRATION. D'après le théorème précédent, il existe une suite normalisée  $(V_n)$  de  $X$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|TV_n - \lambda V_n\| = 0$ . Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre non trivial sur  $\mathbb{N}$  et soit  $Y = X^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$  une ultrapuissance de  $X$ . On peut étendre  $T$  et  $U$  à  $Y$  et ces extensions vérifieront  $TU = UT$ . Si  $V = (V_n)_n \in Y$  on a  $TV = \lambda V$ . Soit  $Z = \{y \in Y / Ty = \lambda y\}$   $Z$  est non vide et fermé et, comme  $T$  et  $U$  commutent,  $U$  est un endomorphisme de  $Z$ .

Soit  $\mu$  un point de la frontière du spectre de  $U : Z \rightarrow Z$ . D'après le théorème I.2 il existe une suite normalisée  $(z_n)$  de  $Z$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Uz_n - \mu z_n\| = 0$ .

Dans  $Z^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$  il existe donc un vecteur  $\omega = (z_n)_n$  tel que  $T\omega = \lambda\omega$  et  $U\omega = \mu\omega$ . Mais  $Z^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \subset Y^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \simeq X^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}'$ , pour un ultrafiltre non trivial  $\mathcal{U}'$  de  $\mathbb{N}$ , on obtient donc une suite normalisée  $(\omega_n)$  de  $X$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|T\omega_n - \lambda\omega_n\|}{q^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|U\omega_n - \mu\omega_n\|}{q^n} = 0.$$

En passant à une sous suite on obtient le résultat désiré.

**II. Finie représentation en blocs de  $l_p$  ou  $c_0$  dans toute suite infinie**

Grâce au théorème I.1 et à la proposition I.1, nous pouvons nous placer dans le cas où la suite infinie est  $(y_d)_{d \in D}$  1-inconditionnelle, 1 sous-symétrique et  $D$  totalement ordonné.

*Construction des blocs  $(1 + \varepsilon)$  équivalents à la base canonique de  $l_p$*

Soit  $D = \mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels et  $(y_q)_{q \in \mathbb{Q}}$  une suite infinie 1-inconditionnelle, 1 sous-symétrique. Posons  $Y = [y_q]_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}$ . Tout élément  $f$  de  $Y$  peut être considéré comme une fonction sur l'espace discret  $\{y_q\}_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}$ . Définissons deux endomorphismes  $T$  et  $U$  de  $Y$  par:

$T: Y \rightarrow Y$

$$f \rightarrow Tf \quad \text{définie par} \quad Tf(x) = \begin{cases} f(2x) & 0 \leq x < 1/2, \\ f(2x - 1) & 1/2 \leq x < 1; \end{cases}$$

$U: Y \rightarrow Y$

$$f \rightarrow Uf \quad \text{définie par} \quad Uf(x) = \begin{cases} f(3x) & 0 \leq x < 1/3, \\ f(3x - 1) & 1/3 \leq x < 2/3, \\ f(3x - 2) & 2/3 \leq x < 1, \end{cases}$$

On vérifie aisément que  $T$  et  $U$  commutent.

PROPOSITION II.1. *Pour tout  $f$  élément de  $Y$ :*

- (a)  $\|f\| \leq \|Tf\| \leq 2\|f\|$ ,
- (b)  $\|f\| \leq \|Uf\| \leq 3\|f\|$ .

DÉMONSTRATION. (a) Si  $f = \sum_{k=1}^n a_k y_{q_k}$  alors  $Tf = \sum_{k=1}^n a_k y_{q_k/2} + \sum_{k=1}^n a_k y_{q_k/2+1}$ . Le résultat est alors immédiat par l'inconditionnalité et la sous symétrie de la suite  $(y_q)$ .

(b) Se démontre de la même manière.

Soit  $(f_n)$  une suite normalisée de  $Y(f_n = \sum_{k=1}^{k(n)} \alpha_k^n y_{q_k})$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tf_n - \lambda f_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Uf_n - \mu f_n\| = 0.$$

Définissons pour tout  $n$  et  $m$  entiers naturels les vecteurs:

$$b_m^n = \sum_{k=1}^{k(n)} \alpha_k^n y_{q_k+m}.$$

Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre non trivial sur  $\mathbb{N}$ ,  $(e_j)$  une suite de vecteurs indépendants. Par la proposition I.1 on définit une norme sur  $[e_j]$  par:

$$\left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \right\| = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathcal{U}}} \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i^n \right\|.$$

On obtient que  $(e_j)$  est une suite 1-inconditionnelle, finiment représentée en blocs dans  $(y_q)_{q \in \mathbb{Q}}$ , donc dans  $(x_j)$ .

REMARQUE. On obtient en corollaire à la proposition II.1 que  $1 \leq \lambda \leq 2$  et  $1 \leq \mu \leq 3$ .

PROPOSITION II.2. *La suite  $(e_j)$  est 1-sous symétrique.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que pour tout  $n$

$$\| \alpha_1 b_{i_1}^n + \dots + \alpha_k b_{i_k}^n \| = \| \alpha_1 b_{i_1}^n + \dots + \alpha_k b_{i_k}^n \|$$

avec  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .

Pour tout  $1 \leq j \leq k$ , définissons une bijection  $T_j$  entre les intervalles  $[j, j + 1[$  et  $[i_j, i_j + 1[$

$$T_j : x \rightarrow x + i_j - j.$$

$T_j$  conserve l'ordre et induit une isométrie  $T_j^*$  entre les espaces  $[y_q : q \in \mathbb{Q} \cap [j, j + 1[$  et  $[y_q : q \in \mathbb{Q} \cap [i_j, i_j + 1[$  définie par  $T_j^*(e_q) = e_{T_j(q)}$ . On vérifie alors aisément que  $T_j^*(b_j^n) = b_{i_j}^n$ .

DÉFINITIONS. (1) Soit  $f = \sum_q \alpha_q e_q$ . On appelle support de  $f$  l'ensemble

$$\text{supp}(f) = \{q \in \mathbb{Q} / \alpha_q \neq 0\}.$$

(2) Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $[y_q]_{q \in \mathbb{Q}}$ . On dit que  $\text{supp}(f) < \text{supp}(g)$  si pour tout  $a \in \text{supp} f$ , pour tout  $b \in \text{supp}(g) : a < b$ .

PROPOSITION II.3. *Soient  $j$  et  $n$  deux entiers naturels. Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $[y_q]$  tels que :*

$$\text{supp} f < \text{supp} T b_j^n < \text{supp} g, \quad \text{supp} f < \text{supp}(b_j^n + b_{j+1}^n) < \text{supp} g.$$

Alors  $\|f + T b_j^n + g\| = \|f + b_j^n + b_{j+1}^n + g\|$ .

DÉMONSTRATION. Notons

$$A = \text{supp}(f + b_j^n + b_{j+1}^n + g), \quad B = \text{supp}(f + Tb_j^n + g).$$

Définissons  $\tau : A \rightarrow B$  par

$$a \rightarrow \tau(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \in \text{supp}(f + g), \\ \frac{q+j}{2} & \text{si } q \in \text{supp}(b_j^n + b_{j+1}^n). \end{cases}$$

$\tau$  est une bijection de  $A$  sur  $B$  qui conserve l'ordre et qui induit donc une isométrie entre les espaces  $[y_q]_{q \in A}$  et  $[y_q]_{q \in B}$ .

PROPOSITION II.4. Soient  $j$  et  $n$  deux entiers naturels. Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $[y_q]$  tels que :

$$\text{supp } f < \text{supp } Ub_j^n < \text{supp } g, \quad \text{supp } f < \text{supp}(b_j^n + b_{j+1}^n + b_{j+2}^n) < \text{supp } g.$$

Alors  $\|f + Ub_j^n + g\| = \|f + b_j^n + b_{j+1}^n + b_{j+2}^n + g\|.$

DÉMONSTRATION. Elle est semblable à celle de la proposition précédente.

PROPOSITION II.5. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $[e_j]$  tels que  $\text{supp } x < j < j + 2 < \text{supp } y$ . Alors

- (a)  $\|x + \lambda e_j + y\| = \|x + e_j + e_{j+1} + y\|,$
- (b)  $\|x + \mu e_j + y\| = \|x + e_j + e_{j+1} + e_{j+2} + y\|.$

DÉMONSTRATION. Nous démontrerons que (a), le second cas étant semblable. On peut supposer que  $x = \sum_{i=1}^{j-1} c_i e_i$  et  $y = \sum_{i=j+3}^l c_i e_i$ .

Définissons  $f_n = \sum_{i=1}^{j-1} c_i b_i^n$  et  $g_n = \sum_{i=j+3}^l c_i b_i^n$ . On obtient:

$$\text{supp } f_n < \text{supp } Tb_j^n < \text{supp } g_n,$$

$$\text{supp } f_n < \text{supp}(b_j^n + b_{j+1}^n) < \text{supp } g_n.$$

Donc, par la proposition précédente:

$$\|f_n + Tb_j^n + g_n\| = \|f_n + b_j^n + b_{j+1}^n + g_n\|.$$

En passant à la limite selon l'ultrafiltre  $\mathcal{U}$ , on obtient le résultat souhaité.

PROPOSITION II.6. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $[e_j]$  tels que  $\text{supp } x < j < j + 3^k - 1 < \text{supp } y$ . Alors

- (a)  $\|x + \lambda^k e_j + y\| = \|x + e_j + \dots + e_{j+2^k-1} + y\|,$
- (b)  $\|x + \mu^k e_j + y\| = \|x + e_j + \dots + e_{j+3^k-1} + y\|.$

DÉMONSTRATION. Elle se fait par récurrence sur  $k$  en utilisant la proposition précédente.

COROLLAIRE. *Pour tout  $k$  entier naturel :*

$$\|e_1 + \dots + e_{2^k}\| = \lambda^k, \quad \|e_1 + \dots + e_{3^k}\| = \mu^k.$$

Rappelons le:

LEMME II.1. *Soit  $\gamma$  un réel positif et  $\varepsilon < 0$ . Il existe  $n, m, n', m'$  entiers naturels tels que :  $2^n 3^{-m} \leq \gamma \leq 2^{n'} 3^{-m'} \leq (1 + \varepsilon) 2^n 3^{-m}$ .*

DÉMONSTRATION. Voir [3] Lemme 2.2.

PROPOSITION II.7. *L'espace  $[e_i]$  est isométrique à  $c_0$  on à  $l_p$  pour un  $1 \leq p < \infty$ .*

DÉMONSTRATION. En utilisant le corollaire précédent on voit que

$$\begin{cases} 2^k \cong 3^m \Rightarrow \lambda^k \cong \mu^m, \\ 2^k \cong 3^m \Rightarrow \lambda^k \cong \mu^m. \end{cases}$$

On a alors:

1er cas :  $\lambda = 1$  si et seulement si  $\mu = 1$ .

On démontre aisément que  $[e_i]$  est isométrique à  $c_0$ .

2ème cas :  $\lambda > 1$  et  $\mu > 1$ .

Il existe alors  $p \geq 1$  tel que  $\lambda = 2^{1/p}$  et  $\mu = 3^{1/p}$ .

LEMME II.2. *Pour tout  $k$  entier naturel :  $\|e_1 + \dots + e_k\| = k^{1/p}$ .*

DÉMONSTRATION. On utilise le lemme II.1 pour trouver  $n, m, n', m'$  tels que  $2^n 3^{-m} \leq k < 2^{n'} 3^{-m'} \leq (1 + \varepsilon) 2^n 3^{-m}$ .

Soit  $M = \max(m, m')$ . On obtient:

$$\begin{aligned} (2^n 3^{M-m})^{1/p} &= \left\| \sum_{i=1}^{2^n 3^{M-m}} e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{3^{M-k}} e_i \right\| \\ &= 3^{M/p} \left\| \sum_{i=1}^k e_i \right\| \leq (2^{n'} 3^{M-m'})^{1/p} \leq (1 + \varepsilon)^{1/p} (2^n 3^{M-m})^{1/p}. \end{aligned}$$

Quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, on obtient le résultat.

Soient  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  scalaires. Evaluons la norme  $\|\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i\|$

— si  $\alpha_i = (2^{n_i} 3^{-m_i})^{1/p}$  ( $i = 1, \dots, k$ ), soit  $M = \max(m_i)$  et soit  $\beta_i = \alpha_i 3^{M/p}$ . On obtient

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^k \beta_i e_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^k (2^{n_i} 3^{M-m_i})^{1/p} e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k \sum_{\Sigma 2^{n_i} 3^{M-m_i}} e_i \right\| \\ &= \left( \sum_{i=1}^k 2^{n_i} 3^{M-m_i} \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^k \beta_i p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

et donc le même résultat pour les  $(\alpha_i)_{i=1}^k$  ;

— si les  $(\alpha_i)$  sont quelconques on utilise de nouveau le lemme II.1 pour obtenir que  $[e_i]$  est isométrique à  $l_p$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

1. H. P. Dowson, *Spectral Theory of Linear Operators*, Academic Press, 1977.
2. J. L. Krivine, *Sous espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Ann. of Math. **104** (1976), 1–29.
3. H. P. Rosenthal, *On a theorem of J.L. Krivine*, J. Functional Analysis **28** (1978), 197–225.

UNIVERSITE PARIS VI  
 TOUR 46/0–4ÈME ETAGE  
 4, PLACE JUSSIEU  
 75230 — PARIS CEDEX 05, FRANCE